

ENSINANDO PROBABILIDADE E NÚMEROS NO ENSINO FUNDAMENTAL COM O QUINCUNX

TEACHING PROBABILITY AND NUMBERS IN FUNDAMENTAL EDUCATION WITH QUINCUNX

Eric Batista Ferreira¹Rafael Lemos Bastos²**RESUMO:**

Quincunx ou Tábua de Galton é um dispositivo criado por Sir Francis Galton, importante matemático e estatístico inglês, no fim do século XIX. Galton criou esse dispositivo para reproduzir empiricamente a distribuição Normal de probabilidades, ao estudar a lei dos erros. Este artigo pretende mostrar que o quincunx pode ser facilmente construído e utilizado para o ensino de probabilidade e números no Ensino Fundamental, introduzindo os estudantes no mundo da Estatística e despertando a noção intuitiva da distribuição Normal. Acredita-se que, de posse de um pensamento estatístico, os estudantes poderão apresentar facilidades de compreensão quando, posteriormente, cursarem disciplinas de Estatística básica ou aplicada em níveis superiores.

PALAVRAS-CHAVE: Quincunx; Probabilidade; Números; Parâmetros Curriculares Nacionais; Distribuição Normal.

ABSTRACT:

Quincunx Galton Board is a device created by Sir Francis Galton, a leading English mathematician and statistician at the end of the nineteenth century. Galton created this device to reproduce empirically the normal distribution of probabilities, to study the law of errors. This article aims to show that the quincunx can be easily built and used for teaching probability and numbers in fundamental education, introducing students to the world of Statistics and awakening the intuitive notion of the normal distribution. It is believed that, in possession of a statistical thinking, students may present facilities of understanding when, later, take courses in basic and applied statistics at higher levels.

KEYWORDS: Quincunx; Probability; Numbers; National Curricular Parameters; Normal Distribution.

¹ Doutor e mestre em Estatística e Experimentação Agropecuária e bacharel em Agronomia pela Universidade Federal de Lavras, licenciado em Matemática pela Universidade Federal de Alfenas, com pós-doutorados no Norwegian Institute of Food, Fisheries and Aquaculture Research e na Universidade Federal de Lavras. Professor da Universidade Federal de Alfenas. Currículo: <http://lattes.cnpq.br/9965398009651936>.

² Doutor e mestre em Estatística e Experimentação Agropecuária pela Universidade Federal de Lavras e graduado em Matemática pela Universidade Federal de Alfenas. Professor substituto do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Sul de Minas Gerais. Currículo: <http://lattes.cnpq.br/8685795545223137>.

01 – INTRODUÇÃO

O ensino de Estatística e Probabilidade no âmbito da Educação Básica é competência do professor de Matemática. Apesar disso, não é raro que tal professor possua uma visão determinística do mundo. Como afirmam Oliveira e Cazorla (2008), “...quase não se dá atenção ao pensamento probabilístico, pois estamos habituados a uma Matemática de certezas”.

Quincunx, tábua de Galton, caixa de Galton ou *Bean machine* é um dispositivo criado por Sir Francis Galton para demonstrar empiricamente o Teorema Central do Limite, em particular, que a distribuição Normal pode ser aproximada pela distribuição Binomial. Estatístico britânico, Francis Galton mostrou como reproduzir, com uma tábua com pregos perpendiculares e pequenas bolas, aparadas em sua parte inferior, a curva de distribuição Normal, popularmente conhecida como “a curva de Gauss”³.

O aparelho consiste de uma placa vertical com linhas intercaladas de pinos (ou pregos). Bolas são soltas da parte superior, e podem cair para a esquerda ou direita (teoricamente, com 50% de probabilidade), a medida que batem nos pinos. Ao final da queda, elas são recolhidas em canaletas localizadas na parte inferior do dispositivo. Ao se acumularem nas canaletas, as colunas de bolas sugerem o formato da distribuição Normal de probabilidades. Dessa forma, levanta-se a hipótese de que o aparelho quincunx possa ser utilizado em sala de aula para auxiliar no ensino de Estatística e Probabilidade.

1.1 – Teorema Central do Limite

Na teoria das probabilidades, o Teorema Central do Limite (TCL) é um teorema que afirma que quando o tamanho da amostra aumenta, a distribuição amostral da sua média aproxima-se cada vez mais de uma distribuição Normal.

3 Embora chamada de Curva de Gauss, a distribuição Normal foi introduzida por Abraham de Moivre em um artigo no ano 1733. Gauss, que alegou tê-la usado desde 1794, a justificou rigorosamente apenas em 1809 (WALKER; LEV, 1958).

Mood, Graybill e Boes (1974) enunciam o TCL da seguinte forma. Seja f uma densidade com média μ e variância finita σ^2 . Seja $\bar{Y}$ a média amostral de uma amostra aleatória de tamanho n de f . Seja a variável aleatória Z definida por

$$Z = \frac{\bar{Y} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}. \quad (1)$$

Então, a distribuição de Z aproxima-se de uma distribuição Normal padrão quando n tende ao infinito.

Em particular, o quincunx demonstra empiricamente a distribuição de frequências da média amostral da distribuição Binomial, que se aproxima de uma distribuição Normal, a medida que se aumenta o número de bolas.

1.2 – A Distribuição Normal de Probabilidades

A distribuição Normal (distribuição de Gauss, ou gaussiana) é uma das distribuições de probabilidade mais comumente observadas na natureza e é o ponto de partida para a modelagem de diversos processos naturais (MOOD; GRAYBILL; BOES, 1974). Ela geralmente figura em eventos que são uma junção de eventos aleatórios independentes muito menores, que podem ser, até mesmo, não-observáveis. Matematicamente, a distribuição Normal de probabilidades é descrita pela seguinte função densidade de probabilidade:

$$f(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \frac{(Y - \mu)^2}{\sigma^2} \right\} \quad 2)$$

em que $-\infty < Y < \infty$ são os possíveis resultados de uma variável aleatória Y que tem distribuição Normal, com média μ e variância σ^2 .

A equação (2) é chamada então de *função densidade de probabilidade* (fdp), quantidade que não possui muita utilidade além da óbvia, calcular as probabilidades. Como definição de fdp, temos que a área total abaixo da curva (integral imprópria) deve ser igual a unidade. Especificamente para a densidade Normal, temos que

Revista Brasileira de Educação e Cultura – ISSN 2237-3098 Centro de Ensino Superior de São Gotardo	Número XVIII Jul-dez 2018	Trabalho 07 Páginas 101-122
http://periodicos.cesg.edu.br/index.php/educacaoecultura	periodicoscesg@gmail.com	

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \frac{(Y - \mu)^2}{\sigma^2} \right\} dy = 1.$$

Em distribuições contínuas, a *probabilidade* é dada pela área abaixo da curva, entre dois pontos (digamos, y_0 e y_1). Para a distribuição Normal, por exemplo, calculam-se as probabilidades de interesse por meio de integrais definidas, a saber

$$P[y_0 < Y < y_1] = \int_{y_0}^{y_1} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \frac{(Y - \mu)^2}{\sigma^2} \right\} dy, \quad 3)$$

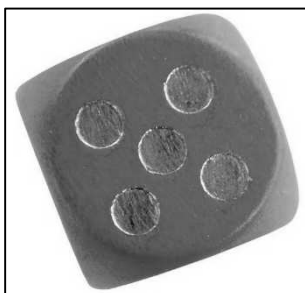
Vale ressaltar que (3) não possui resultado analítico, sendo necessários, portanto, métodos numéricos de integração.

02 – QUINCUNX

Esse tópico tem por objetivo fazer uma reflexão sobre alguns aspectos do quincunx, desde a origem do nome até sua construção em sala de aula.

2.1 – A Origem

Um quincunx ('*kwin.kəŋks*) é um padrão geométrico que consiste em cinco pontos dispostos coplanares disposto em forma de cruz, quatro deles formando um quadrado ou retângulo e um quinto em seu centro (como a quinta face de um dados, Figura 1a).



(a)



(b)

Figura 1 (a) Dado: na sua quinta face os pontos estão dispostos no padrão quincunx. (b) Moeda romana chamada quincunx, cujo valor era 5/12 de uma moeda de bronze. **Fonte:** Wikipedia (2001).

Originalmente, Quincunx era uma moeda emitida pela República Romana (Figura 1b), 211-200 aC, cujo valor era $5/12$ (*quinque* + *uncia*) de uma “as”, a moeda de bronze padrão Romana (MWCD, 1993 apud PAJARES-AYUELA, 2001). Nas moedas romanas quincunx, o valor era às vezes indicado por um padrão de cinco pontos. No entanto, estes pontos não estavam sempre dispostos em um padrão quincunx.

O padrão quincunx de disposição de 5 pontos seria, em 1889, utilizado por Sir Francis Galton para nomear seu mecanismo gerador de distribuições empíricas de probabilidades. Galton enxergou esse padrão nos obstáculos propostos no seu dispositivo (Figura 2).

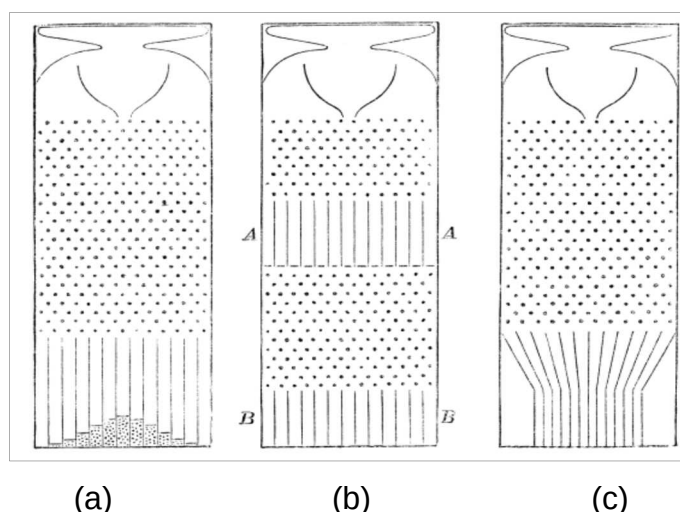


Figura 2: Três modelos de quincunx propostos por Sir Francis Galton (a) regular (b) duplo (c) convergente. Fonte: Adaptado de Bulmer (2003).

Na Figura 2(a) pode-se ver o dispositivo quincunx na sua forma mais simples. Na Figura 2(b) é apresentado o quincunx na sua forma dupla, o que ilustra que a soma de duas variáveis normais independentes é distribuída normalmente. Na Figura 2(c) apresenta-se o quincunx convergente, que pretendia demonstrar que quando se multiplica uma variável aleatória Normal por uma constante confinada entre zero e um, a distribuição do produto é uma normal com menor variância (mais “estreita”).

2.2 – A Teoria do Processo

É um processo simples que reproduz aproximadamente a distribuição Normal de probabilidades. Bolas são soltas em um funil posicionado na parte superior do mecanismo e colidem com uma série de obstáculos (pinos) até chegar ao fundo, onde se acumulam até gerar a silhueta da distribuição Normal (Figura 3).

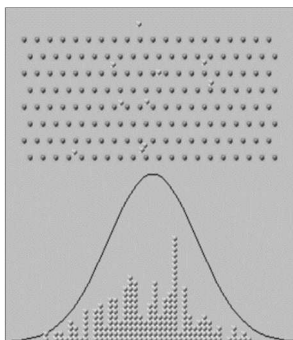


Figura 3 Esquema ilustrativo do Quincunx com oito fileiras de obstáculos. Fonte: Zhou (2011).

Experimentalmente esse processo funciona porque a posição final de cada bola é determinada por muitos eventos aleatórios supostamente independentes (no exemplo, 8 fileiras de pinos), representados por cair para a esquerda ou para a direita do pino, gerando assim, aproximadamente, o formato da distribuição Normal (GAYON, 1998). Cada um desses eventos (cada pino) pode ser entendido como sendo descrito por uma distribuição Bernoulli. Portanto, por exemplo, um conjunto de 8 ensaios de Bernoulli constitui um evento Binomial (4).

$$P [Y = y_i] = \binom{m}{y_i} p^{y_i} (1 - p)^{m - y_i}, \quad 4)$$

em que y_i é o número de sucessos em m ensaios de Bernoulli (fileiras de pinos); e p é a probabilidade de sucesso.

Para continuar exemplificando, considere que cada bola tem a mesma probabilidade de cair para direita e para a esquerda em cada pino, ou seja, 50%. Se uma bola for largada bem em cima do pino do meio, a probabilidade de ela cair sempre para a direita (ou para a esquerda), nos 8 pinos (portanto se depositando, ao final, na canaleta da extrema direita), é de

$$P[Y = 8] = \binom{8}{8} \times 0,5^8 \times 0,5^0 = 0,003906 \approx 0,39\%.$$

Como essa probabilidade é muito baixa, as canaletas das extremidades serão sempre as mais vazias. A medida que se aproximam do centro, as canaletas têm cada vez maior probabilidade de encherem e, portanto, é onde se obtém experimentalmente colunas maiores. Também do ponto de vista teórico, a canaleta central é a que receberá mais bolas, pois ela representa a esperança matemática.

No exemplo das 8 fileiras de pinos, $E[Y] = mp = 8 \times 0,5 = 4$ sucessos. Como a primeira canaleta representa zero sucessos, os 4 sucessos são obtidos na quinta canaleta (Figura 4). Daí, pode-se inferir que, dadas m fileiras de pinos, o número de canaletas deveria ser, no mínimo, $m+1$.

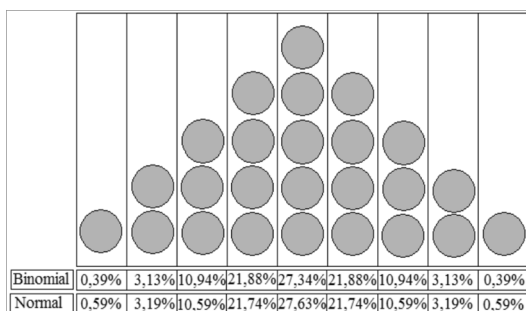


Figura 4 Probabilidades Binomial e Normal para cada canaleta em um exemplo de nove canaletas, vinte e cinco bolas e oito fileiras de pinos. Fonte: Próprios autores.

Seja n o número de bolas que serão utilizadas no processo. A medida que n e m crescem, uma distribuição Binomial com parâmetros m e p pode ser aproximada de maneira satisfatória pela distribuição Normal, com parâmetros $\mu=mp$ e $\sigma=\sqrt{mpq}$ (SANTOS, 2008; GAYON, 1998). A Figura 4 representa as probabilidades de uma bola cair em cada canaleta, de acordo com a distribuição Binomial e sua aproximação pela Normal. Quanto mais bolas são utilizadas, e mais fileiras de pinos existem, mais o desenho formado se parecerá com um sino.

Uma experiência de sucesso é relatada na abordagem de probabilidades binomiais, no Ensino Fundamental, pelos autores (OLIVEIRA; CAZORLA, 2008). Nessa experiência, os autores utilizaram o jogo “Os passeios aleatórios de Mônica”, proposto pelos autores (CAZORLA; SANTANA, 2006).

Por fim, considere os conceitos de probabilidade frequentista e clássica:

- O conceito frequentista estabelece o cálculo de probabilidades por meio de observações sucessivas de um experimento aleatório. A probabilidade é estimada de maneira empírica experimental, podendo ser encontrada quando o número de experimentações n tende ao infinito. A probabilidade neste caso é definida pela razão do número de ocorrências e do número total de repetições (BAYER et al., 2002). Em outras palavras, a probabilidade de um resultado é a proporção das repetições do processo que conduzem a esse resultado.
- O conceito clássico para estabelecer probabilidades é bastante simples e direto, mas só pode ser usado em espaços amostrais equiprováveis. A probabilidade de um evento neste caso é igual à razão entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis (LAPLACE, 1814).

Analisando ambos conceitos, constata-se que o dispositivo Quincunx segue o conceito frequentista, pois seu espaço amostral não é equiprovável. Em outras palavras, a probabilidade de cada canaleta receber uma bola, não é a mesma.

03 – CONSTRUINDO UM QUINCUNX

Nesta seção é apresentado a descrição da construção do Quincunx conforme descrito por alguns autores, utilizando diferentes materiais, número de fileiras de pregos e canaletas.

3.1 – Quincunx com 17 Fileiras de Pregos (AQUINO; CERDEIRA, 2004)

Nesse trabalho, os autores relatam a construção de um exemplo das diversas maneiras que o quincunx pode ser feito. Os materiais utilizados foram:

- Tábua de madeira com 40cm de comprimento e 60cm de altura;
- Pregos (de diâmetro desprezível);⁴
- Bolas de diâmetro 16mm;
- Fita crepe para fazer as divisórias.

4 A quantidade de pregos necessária para a construção desse modelo de quincunx é dada por $S = (f^2 + 5f + 2)/2$, em que f é a quantidade de fileiras de pregos que sofrem colisão (Apêndice A).

Foram feitas 18 fileiras horizontais de pregos. Dessas, a última fileira de pregos serve apenas para fixar as divisórias (fitas crepe). Portanto, em teoria, cada bola terá 17 colisões. Como $f=17$, a quantidade de pregos utilizados neste Quincunx foi de 188. Na montagem do aparelho foi considerado o espaçamento de 20mm entre pregos e entre fileiras (Figura 5).

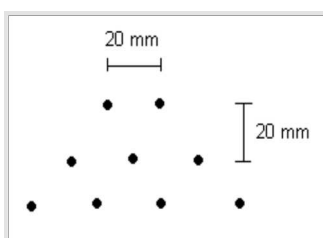


Figura 5 Esquema da montagem das fileiras de pregos. Fonte: Aquino e Cerdeira (2004).

A primeira fileira havia dois pregos. A partir da segunda, o número de pregos cresceu de acordo com uma progressão aritmética de ordem 1. Na última fileira existiam, portanto, 18 pregos, definindo 17 divisórias (Figura 6).

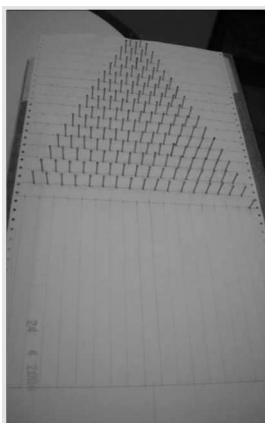


Figura 6 Quincunx de Aquino e Cerdeira (2004), com as fileiras de pregos. Fonte: Aquino e Cerdeira (2004).

É importante ressaltar que Aquino e Cerdeira (2004) utilizaram materiais de baixo custo, e recomendam sua construção mesmo em escolas com poucos recursos financeiros. Por outro lado, tais materiais geram imprecisões, o que pode comprometer os resultados.

Alguns cuidados importantes para aumentar a precisão do aparelho são:

- a madeira utilizada deve estar bem lixada;
- os pregos devem ser fixados exatamente na perpendicular;
- as bolas não podem ter rachaduras ou sobras (de plástico, p.ex.);

Santos (2008) também apresenta a construção de dois dispositivos quincunx, com tamanhos diferentes. Um destes, construído com material de baixo custo e o outro com material com custo mais elevado.

3.2 – Quincunx com 16 Fileiras de Pregos (SANTOS, 2008)

Este quincunx foi construído com material de baixo custo, visando sua utilização em escolas com poucos recursos financeiros. Ele consta de dezesseis fileiras de pregos e dezessete divisórias. Isso ocorre porque sua primeira fileira contém 3 pregos e, a partir da segunda, o número de pregos cresce de acordo com uma progressão aritmética de ordem 1. Com o objetivo de permitir seu uso na vertical, a área dos pregos e a das divisórias foi enfaixada com plástico, de forma que as esferas pudessem se movimentar em seu interior (Figura 7a).

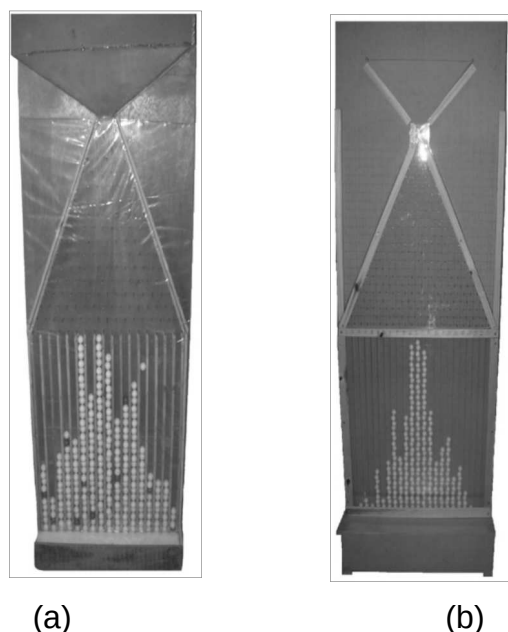


Figura 7: Quincunx construído com materiais de baixo custo (a) e alto custo (b). Fonte: Santos (2008).

3.3 – Quincunx com 22 Fileiras de Pregos (santos, 2008)

Este quincunx foi construído seguindo as mesmas orientações do primeiro. As principais diferenças são: custo mais elevado, em função do material utilizado em sua construção e maior número de fileiras de pregos, cujo objetivo é obter distribuições mais parecidas com a curva normal (Figura 7b).

Revista Brasileira de Educação e Cultura – ISSN 2237-3098 Centro de Ensino Superior de São Gotardo	Número XVIII Jul-dez 2018	Trabalho 07 Páginas 101-122
http://periodicos.cesg.edu.br/index.php/educacaoecultura	periodicoscesg@gmail.com	

04 – RECOMENDAÇÕES DOS PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS (PCN)

Atualmente, há consenso a fim de que os currículos de Matemática para o ensino fundamental devem contemplar o estudo dos números e das operações (no campo da Aritmética e da Álgebra). Um olhar mais atento para a sociedade atual mostra a necessidade de acrescentar a esses conteúdos aqueles que permitam ao cidadão tratar as informações que recebe cotidianamente, aprendendo a lidar com dados estatísticos, tabelas e gráficos, a raciocinar utilizando ideias relativas à probabilidade e à combinatória.

Ao longo do ensino fundamental o conhecimento sobre os números é construído e assimilado pelo aluno num processo em que tais números aparecem como instrumento eficaz para resolver determinados problemas, e também como objeto de estudo em si mesmos, considerando-se, nesta dimensão, suas propriedades, suas inter-relações e o modo como historicamente foram constituídas. Nesse processo, o aluno perceberá a existência de diversos tipos de números (números naturais, inteiros, racionais e irracionais) bem como de seus diferentes significados, à medida que deparar com situações-problema envolvendo operações ou medidas de grandezas, como também ao estudar algumas das questões que compõem a história do desenvolvimento do conhecimento matemático.

Os PCN (BRASIL, 1998) preconizam que o ensino de Matemática no terceiro ciclo do ensino fundamental deve objetivar, dentre outras coisas:

- Resolver situações-problema envolvendo números naturais, inteiros, racionais e a partir delas ampliar e construir novos significados da adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação;
- Resolver situações-problema que envolvam o raciocínio combinatório e a determinação da probabilidade de sucesso de um determinado evento por meio de uma razão.
- Com relação aos números naturais, muitas vezes se considera que o trabalho com eles se encerra no final do segundo ciclo; no entanto, é fundamental que o aluno continue a explorá-los em situações de contagem, de ordenação, de codificação em que tenha oportunidade de realizar a leitura e escrita de números grandes e

Revista Brasileira de Educação e Cultura – ISSN 2237-3098 Centro de Ensino Superior de São Gotardo	Número XVIII Jul-dez 2018	Trabalho 07 Páginas 101-122
http://periodicos.cesg.edu.br/index.php/educacaoecultura	periodicoscesg@gmail.com	

desenvolver uma compreensão mais consistente das regras que caracterizam o sistema de numeração que utiliza.

Por sua vez, para o quarto ciclo do ensino fundamental, os PCN (BRASIL, 1998) sugerem os seguintes conteúdos e procedimentos de Matemática:

- O estudo da probabilidade tem por finalidade fazer com que os alunos percebam que por meio de experimentações e simulações podem indicar a possibilidade de ocorrência de um determinado evento e compará-la com a probabilidade prevista por meio de um modelo matemático.
- Usar os diferentes significados dos números naturais, inteiros, racionais, irracionais e das operações para resolver problemas, em contextos sociais, matemáticos ou de outras áreas do conhecimento.
- Com relação aos números naturais é possível identificar alguns fatores que têm concorrido para que sua aprendizagem acabe não se consolidando ao longo do ensino fundamental:
 - Leitura dos números que implica a compreensão de regras estabelecidas para a formação das classes, agrupamentos de mil (milhares, milhões, bilhões, trilhões...);
 - Valor posicional dos algarismos na escrita numérica que nem sempre é percebido: mesmo alunos que sabem escrever números corretamente, muitas vezes não os sabem interpretar, afirmando, por exemplo, que 2.343 é próximo de 2.340, mas não reconhecendo que em 2.343 há 234 dezenas.

4.1 – A Probabilidade no Ensino Fundamental

A Estatística e a Probabilidade têm um papel essencial na formação do cidadão, uma vez que possibilitam lidar com a aleatoriedade e o acaso, permitindo uma análise de fatos complexos que, sob uma visão determinista, tornam-se impossíveis de serem tratados. Sendo assim, ao pensar a inclusão desses temas no currículo faz-se necessário pensar quais conceitos devem ser abordados a fim de garantir a possibilidade de desenvolvimento de uma visão estatística e probabilística expressiva (LOPES, 1999).

Revista Brasileira de Educação e Cultura – ISSN 2237-3098 Centro de Ensino Superior de São Gotardo	Número XVIII Jul-dez 2018	Trabalho 07 Páginas 101-122
http://periodicos.cesg.edu.br/index.php/educacaoecultura	periodicoscesg@gmail.com	

Entretanto, embora a estatística e a probabilidade tenham um papel essencial na formação do cidadão, muitos professores sentem-se inseguros ao lidar com o ensino de probabilidade. Existem duas dificuldades pedagógicas para que os professores de matemática da Educação Básica ensinem Probabilidade (SERRADÓ; AZCÁRATE; CÁRDENOSO, 2006; GONÇALVES; MUNIZ, 2006):

- Quebrar hábitos e assim, buscar novas informações e atividades para desenvolver na sala de aula.
- Geralmente, educadores provenientes das licenciaturas em Matemática, não têm formação nas questões relacionadas ao ensino deste conteúdo.

Para o terceiro ciclo do ensino fundamental, os PCN (BRASIL, 1998) sugerem – dentre outros – os seguintes conteúdos e procedimentos de Estatística e probabilidade:

- Coleta, organização de dados e utilização de recursos visuais adequados (fluxogramas, tabelas e gráficos) para sintetizá-los, comunicá-los e permitir a elaboração de conclusões.
- Leitura e interpretação de dados expressos em tabelas e gráficos.
- Compreensão do significado da média aritmética como um indicador da tendência de uma pesquisa.
- Construção do espaço amostral e indicação da possibilidade de sucesso de um evento pelo uso de uma razão.

Por sua vez, para o quarto ciclo do ensino fundamental, os PCN (BRASIL, 1998) sugerem – dentre outros – os seguintes conteúdos e procedimentos de Estatística e probabilidade:

- Leitura e interpretação de dados expressos em gráficos de colunas, de setores, histogramas e polígonos de frequência.
- Organização de dados e construção de recursos visuais adequados, como gráficos (de colunas, de setores, histogramas e polígonos de frequência) para apresentar globalmente os dados, destacar aspectos relevantes, sintetizar informações e permitir a elaboração de inferências.

- Compreensão de termos como frequência, frequência relativa, amostra de uma população para interpretar informações de uma pesquisa.
- Obtenção das medidas de tendência central de uma pesquisa (média, moda e mediana), compreendendo seus significados para fazer inferências.
- Construção do espaço amostral, utilizando o princípio multiplicativo e a indicação da probabilidade de um evento por meio de uma razão.
- Elaboração de experimentos e simulações para estimar probabilidades e verificar probabilidades previstas.

Além disso, os PCN (BRASIL, 1998) para o ensino fundamental ainda mencionam duas atitudes que corroboram com as atividades propostas por esse trabalho:

- Compreensão da importância da estatística na atividade humana e de que ela pode induzir a erros de julgamento, pela manipulação de dados e pela apresentação incorreta das informações (ausência da frequência relativa, gráficos com escalas inadequadas).
- Valorização do uso dos recursos tecnológicos, como instrumentos que podem auxiliar na realização de alguns trabalhos, sem anular o esforço da atividade compreensiva.

05 – ATIVIDADES PROPOSTAS

Propõem-se aqui três atividades práticas, a serem realizadas com alunos do Ensino Fundamental, com os seguintes objetivos:

- trabalhar os conceitos de valor dos algarismos em um número: unidade, dezena, centena, milhar, etc.;
- empiricamente, introduzir os conceitos de probabilidade, espaço amostral equiprovável e não-equiprovável;
- dar subsídio suficiente para que os alunos, futuramente, possam lidar com distribuição Normal de probabilidades, aceitando-se como uma distribuição natural.

Revista Brasileira de Educação e Cultura – ISSN 2237-3098 Centro de Ensino Superior de São Gotardo	Número XVIII Jul-dez 2018	Trabalho 07 Páginas 101-122
http://periodicos.cesg.edu.br/index.php/educacaoecultura	periodicoscesg@gmail.com	

- Utilizar recursos computacionais disponíveis para visualizar o funcionamento do Quincunx.

Atividade 1: Probabilidade e espaços amostrais

1. Primeiramente, de posse do Quincunx, explicar aos estudantes do se trata e seu funcionamento – tendo ele sido construído pela turma ou não.
2. Com o auxílio de um aluno, uma bola deve ser colocada no topo do dispositivo e deixada cair, observando e discutindo a sua trajetória.
3. Neste momento, o professor de inserir o conceito de probabilidade, explicando que a bola, ao bates em um pino, tem aproximadamente 50% de chance de cair para a direita e 50% de chance de cair para a esquerda. Se apenas um pino representasse todo o experimento, esse seria o conceito de espaço amostra equiprovável.
4. Antes de largar várias bolas no dispositivo, o professor deve perguntar aos alunos o que eles acham que aconteceria se muitas bolas fossem largadas no alto do dispositivo. Será que elas cairiam preenchendo todas as canaletas? Será que o número de bolas em cada canaleta seria o mesmo? Se não, onde eles esperariam haver o maior número de bolas?
5. Em seguida, o professor deve convidar vários voluntários a soltar suas bolas no alto do dispositivo. Elas devem ser soltas uma de cada vez, para que não se choquem e permitam que os eventos continuem independentes.
6. Após a queda de todas as bolas, deve-se discutir o porquê daquela distribuição ao se observar as bolas dentro das canaletas. Deve-se argumentar que, a cada pino, as bolas caem ora para a direita, ora para a esquerda, e por isso é mais provável sua posição final ser nas canaletas do centro. Como é improvável que uma bola caia sempre para a direita (ou sempre para a esquerda), as canaletas das extremidades são as mais vazias. Essa observação pode ilustrar o conceito de espaço amostral não-equiprovável.

Atividade 2: Números e Algarismos

1. O professor deve nomear cada canaleta de um quincunx, da direita para a esquerda, como *unidades, dezenas, centenas, milhares, dezenas de milhares, centenas de milhares, milhões, dezenas de milhões e centenas de milhões*, no caso de um Quincunx com 9 canaletas.⁵
2. Em seguida, um número fixo de bolas (por exemplo, 30) deve ser cuidadosamente solto no alto do aparelho. Contando-se o número de bolas em cada canaleta, o professor deve chamar atenção para um número real que foi gerado.
3. O experimento pode ser repetido umas 3 ou 4 vezes, para se verificar que o número formado não se repete sempre, o que introduz o conceito de processo probabilístico, de incerteza.
4. Se desejado, e para turmas mais avançadas, o professor pode perguntar aos alunos qual seria o número mais provável de ser formado, ou melhor, qual seria o número que eles esperavam que fosse formado ao se soltarem, por exemplo, 30 bolas. Esse número teria uma característica interessante, seus algarismos extremos seriam menores que seus algarismos centrais. Por exemplo, o número 013.787.310 é o esperado para ser formado em um dispositivo com 9 canaletas, quando 30 bolas fossem usadas.
5. Ao longo das repetições do experimento, ao serem gerados números diferentes pode-se introduzir o conceito empírico de variância.
6. Para alunos mais jovens, de séries iniciais do ensino fundamental, pode-se trabalhar as operações de adição e subtração entre números resultantes dos experimentos. Cada aluno tem a oportunidade de realizar seus próprios experimentos e anotar seus números, que serão provavelmente diferentes dos números de seus colegas. Além disso, a operação de divisão pode ser explorada. Ao se somar os algarismos do número resultante, e dividir o resultado dessa soma pelo número de canaletas, o conceito de número médio de bolas por canaleta surge imediatamente. Como a soma dos algarismos de qualquer número resultante é o número inicial de bolas utilizadas, essa é mais uma conclusão interessante para o aluno.

⁵ Um Quincunx com menos canaletas pode ser construído para se trabalhar com estudantes mais jovens que, por exemplo, devem aprender apenas até as unidades de milhar.

Revista Brasileira de Educação e Cultura – ISSN 2237-3098 Centro de Ensino Superior de São Gotardo	Número XVIII Jul-dez 2018	Trabalho 07 Páginas 101-122
http://periodicos.cesg.edu.br/index.php/educacaoecultura	periodicoscesg@gmail.com	

Atividades 3: Quincunx virtual

Primeiramente, é óbvio que, para desenvolver essa atividade, a escola deve possuir um laboratório de computadores conectados à internet.

Um exemplo de quincunx virtual pode ser encontrado no sítio: <http://www.mathsisfun.com/data/quincunx.html>. Se trata de um simulador eletrônico do quincunx, que permite ao usuário determinar o número de bolas utilizadas, alterar a velocidade de queda (normal e rápida), a probabilidade da bola cair para esquerda (e consequentemente, para a direita), e determinar o número de fileiras de obstáculos (1 a 19), o que determina o número de canaletas (Figura 8).

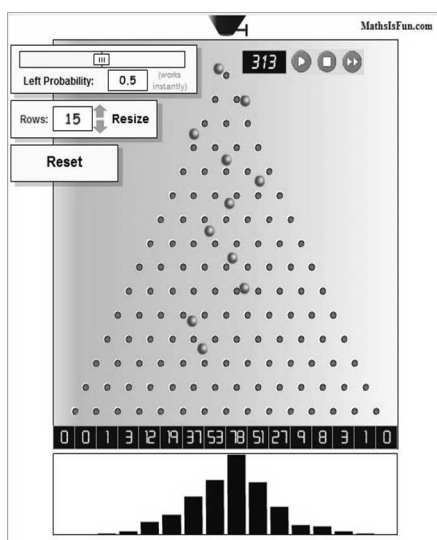


Figura 8 Quincunx virtual com 15 fileiras de obstáculos e 50% de probabilidade, após o lançamento de 313 bolas. Fonte: Math is fun (2011).

Vale notar que nesse quincunx virtual, a primeira fileira contém apenas um obstáculo. Esse jogo ainda dispõe de um histograma que é construído dinamicamente à medida que caem as bolas, mostrando assim o formato da distribuição empírica.

Atividade:

1. Acessem o sítio.
2. Peça aos estudantes que mantenham a probabilidade de 50%.
3. Coloquem o número de fileiras igual ao quincunx construído pela turma (ou um número fixo, caso não haja um quincunx físico).
4. Permitam o lançamento de um número fixo de bolas (30, por exemplo).

5. Chame atenção para o formato do histograma construído.
6. Peça para aumentarem o número de bolas lançadas (talvez usando o recurso de aumentar a velocidade).
7. Novamente, chame atenção para o formato do histograma construído⁶.
8. Sugira alterar a probabilidade drasticamente (por exemplo, 80%) e repita os passos de 3 a 7. Com isso, distribuições empíricas assimétricas serão construídas.
9. Sugira alterar o número de fileiras e repita os passos de 3 a 8. Com isso, pode-se perceber que com mais linhas a distribuição teórica é mais bem aproximada.
10. A noção de espaço amostral não-equiprovável pode ser também explorada, uma vez que, independentemente da probabilidade adotada, ele não será equiprovável (a distribuição uniforme não poderá ser construída).

06 – CONSIDERAÇÕES FINAIS

A Matemática está presente no dia a dia, desde uma simples contagem, nos orçamentos ou nos gastos diários, até nos índices que determinam a qual classe social uma pessoa pertence. É importante saber usufruir e estimular o seu estudo de forma clara e objetiva quanto a sua aplicação imediata.

Porém, apesar de estar presente em tantos momentos importantes, ela pode parecer para muitos, como uma disciplina complexa e isolada. As operações básicas são necessárias, todavia são consideradas difíceis na hora do aprendizado, pois os educandos enfrentam muitas dificuldades em operá-las. Um dos meios de contornar essas dificuldades intelectuais e materiais foi a invenção do ábaco, que pode ser considerado o mais antigo instrumento de computação mecânica usado pelo homem. Este trabalho mostra que o Quincunx pode ser utilizado com finalidade semelhante ao ábaco, além de introduzir conceitos importantes sobre probabilidade, espaços amostrais e eventos aleatórios.

O Quincunx é um aparelho que permite mostrar aos alunos a geração da distribuição Normal e pode ser aplicado em todos os níveis de ensino, podendo-se omitir o formalismo matemático no Ensino Fundamental, devido à complexidade dos

⁶ Com 50% de probabilidade, a noção do Teorema Central do Limite pode ser introduzida ao observar o formato parecido com a Normal.

conceitos envolvidos. Utilizando o Quincunx, o professor pode facilitar o ensino, pois o aluno pode participar ativamente do processo de construção do conhecimento, associando a teoria à prática por meio de simulações lúdicas (SANTOS, 2008).

Com o ensino de probabilidade se iniciando no ensino fundamental o aluno pode compreender que muitos dos acontecimentos do cotidiano são de natureza aleatória. Com isso, os alunos podem identificar seus possíveis resultados e estimar suas possibilidades. As noções de acaso e incerteza, que se manifestam intuitivamente, podem ser exploradas na escola, em situações em que o aluno realiza experimentos e observa seus resultados (eventos), em espaços amostrais equiprováveis e não-equiprováveis. Relativamente aos problemas de contagem, o objetivo é levar o aluno a lidar com situações que envolvam diferentes tipos de agrupamentos que possibilitem o desenvolvimento do raciocínio combinatório e a compreensão do princípio multiplicativo para sua aplicação no cálculo de probabilidades.

Por fim, aconselha-se que a eficiência das atividades propostas neste trabalho seja testada por pesquisas futuras.

07 – REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AQUINO, P. M. de.; CERDEIRA, F. *O Estudo da distribuição Normal por Galton*. Campinas: Unicamp. 2004. 33 p. Disponível em: http://www.ifi.unicamp.br/~lunazzi/F530_F590_F690_F809_F895/F809/F809_sem1_2004/009637_PriscilaA_Cerdeira_F809_RF.pdf. Acesso em: 16 set 2001.

BAYER, A.; BITTENCOURT, H.; ROCHA, J.; ECHEVESTE, S. Probabilidade na escola. In: Congresso Internacional de Ensino de Matemática, 3. *Anais...* 2005. Canoas, RS, Brasil. Disponível em: www.exatas.net/artigo_ciem2.pdf. Acesso em: 16 set 2001.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros curriculares nacionais: Matemática*. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998. 148p.

Revista Brasileira de Educação e Cultura – ISSN 2237-3098 Centro de Ensino Superior de São Gotardo	Número XVIII Jul-dez 2018	Trabalho 07 Páginas 101-122
http://periodicos.cesg.edu.br/index.php/educacaoecultura	periodicoscesg@gmail.com	

BULMER, M. *Francis Galton: Pioneer of Heredity and Biometry*. Baltimore: The Johns Hopkins University Press. 2003. 357 p.

CAZORLA, I. M.; SANTANA, E. R. dos S. The uncertain walks of Mônica. In A. Rossman; B. Chance (Eds.), *Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics*. 2006. *Anais...* [CD-ROM]. Salvador (Bahia), Brazil: International Association for Statistical Education and International Statistical Institute. 2006.

GAYON, J. *Darwinism's struggle for survival: hereditary and hypothesis for natural selection*. Cambridge: Cambridge University. 1998. 516p.

GONÇALVES, H. J. L.; MUNIZ, C. A. A educação Estatística no ensino fundamental: discussões sobre a práxis de professoras que ensinam matemática no interior de Goiás. *Educação Matemática em revista*, São Paulo, v.1, p. 26-33. 2006.

LAPLACE, P.-S. *Essai Philosophique sur lês Probabilités*. (5^a édition em 1825, réimprimée em 1985), Paris: Chrsitian Bourgois éditeur. 1814.

LOPES, C. A. E. A probabilidade e a Estatística no currículo de Matemática do ensino fundamental brasileiro. In: Conferência Internacional: Experiências e Perspectivas do Ensino da Estatística - Desafios para o século XXI. *Anais...* Florianópolis, 20, 21 e 22 de setembro. 1999. p. 167-174.

MATH IS FUN. *Quincunx*. Disponível em: <http://www.mathsisfun.com/data/quincunx.html>. Acesso em 23/12/2018.

MWCD. *Merriam-Webster's Collegiate Dictionary*. 10 ed. 1993. 1664 p.

MOOD, A. M.; GRAYBILL, F. A.; BOES, D. C. *Introduction to the Theory of Statistics*. London: McGraw-Hill. 1974. 577 p.

OLIVEIRA, S. A. de.; CAZORLA, I. M. Ensinando probabilidades no ensino fundamental. *Educação Matemática em Revista*, n. 24. p. 3-6. 2008.

PAJARES-AYUELA, P. *Cosmatesque ornament: flat polychrome geometric patterns in architecture*. New York: Norton, 2001. 320 p.

SANTOS, G. M. dos. *Conceitos estatísticos no desenvolvimento de metodologias interdisciplinares de ensino*. Dissertação (Mestrado em Estatística e Experimentação Agropecuária). Universidade Federal de Lavras, Lavras, MG. 2008. 168p.

Revista Brasileira de Educação e Cultura – ISSN 2237-3098 Centro de Ensino Superior de São Gotardo	Número XVIII Jul-dez 2018	Trabalho 07 Páginas 101-122
http://periodicos.cesg.edu.br/index.php/educacaoecultura	periodicoscesg@gmail.com	

SERRADÓ, A.; AZCÁRATE, P.; CARDEÑOSO, J. M. Analyzing teacher resistance to teaching probability in compulsory education. In A. Rossman; B. Chance (Eds.). Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics. 2006. *Anais...* [CD-ROM]. Salvador (Bahia), Brazil: International Association for Statistical Education and International Statistical Institute. 2006.

WALKER, H. M.; LEV, J. *Elementary Statistical Methods*. New York: Holt, Rinehart and Winston, 1958. 318 p.

WIKIPEDIA. *Quincunx*. Disponível em: <http://en.wikipedia.org/wiki/Quincunx>. Acesso em: 23/12/2018.

ZHOU, M; KRIDER, David. *An Illustration of Basic Probability: The Normal Distribution*. Disponível em: <http://www.ms.uky.edu/~mai/java/stat/GaltonMachine.html>. Acesso em: 30/2/2011.

Apêndice A:

A soma dos termos de uma progressão aritmética é dada por:

$$S = \frac{f(a_1 + a_f)}{2}$$

em que a_1 é a quantidade de pregos na primeira fileira, a_f é a quantidade de pregos na última fileira (que sofre colisão) e f é o número de fileiras que sofrem colisão.

Na construção do quincunx de Aquino e Cerdeira (2004), temos que $a_1 = 2$ e $a_f = f + 1$. Logo, a quantidade de pregos necessária para a construção é:

$$S = \frac{f(2 + f + 1)}{2} = \frac{f^2 + 3f}{2}$$

Além disso, na construção do quincunx de Aquino e Cerdeira (2004), tem-se a fileira de pregos que não sofre colisão, mas que é utilizada na construção das divisórias, ela terá a mesma quantidade de pregos da última fileira que sofre colisão. Portanto, a quantidade de pregos necessária para a construção será:

$$S = \frac{f^2 + 3f}{2} + (f + 1) = \frac{f^2 + 5f + 2}{2}.$$

Apêndice B:

Determinação do número máximo de bolas a serem utilizadas no experimento, em função da altura das canaletas. Suposições:

▲ a dimensão da bola igual à largura da canaleta, ou seja, as bolas só podem ficar empilhadas nas canaletas.

▲ o número de canaletas é ímpar, ou seja, existe apenas 1 canaleta central.

O objetivo de calcular o número máximo de bolas no experimento é minimizar a probabilidade de uma canaleta “transbordar” e, com isso, alterar a distribuição empírica construída.

Seja h a altura das canaletas, d o diâmetro da bola, p_c a probabilidade de uma bola cair na canaleta central e N o número máximo de bolas que será utilizado no experimento.

A esperança do número de bolas na canaleta central é dada por

$$E[Y] = N p_c$$

Por outro lado, desejamos que tal esperança seja igual ao número máximo de bolas que a canaleta por comportar, ou seja,

$$E[Y] = \frac{h}{d}$$

Imediatamente, temos que o número máximo (N) de bolas no experimento deve ser:

$$N = \frac{h}{dp}.$$